

복잡계 과학

- 비예측성, 임계성, 보편성

국형태

가천대학교 물리학과, APCTP

“과학과 문화예술 소통 워크숍”, 소백산천문대, 2013. 3. 15

✓ 카오스계:

- 단순한 계가 보이는 복잡한 운동
- 극도로 복잡한 정보를 내포한 운동(≠무질서)
- 결정론적인 운동: 초기조건을 완벽하게 알면 미래 예측이 가능
- 질서에서 카오스로 가는 경로에 관심

✓ 복잡계:

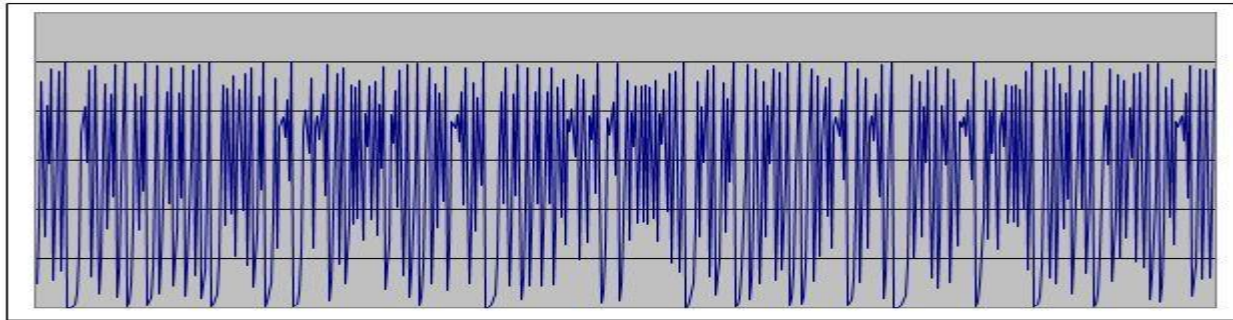
- 수많은 요소들로 구성된 계
- 비결정론적, 비예측적(Ilya Prigogine)
- 결정론적 질서와 무작위성(randomness)의 경계 ('[edge of chaos](#)', Doyne Farmer)
- 경계로부터 진화하는 복잡계의 창발(emergence) 현상: 단순한 운동(단순양상의 형성, 동기화)

혼돈(chaos)

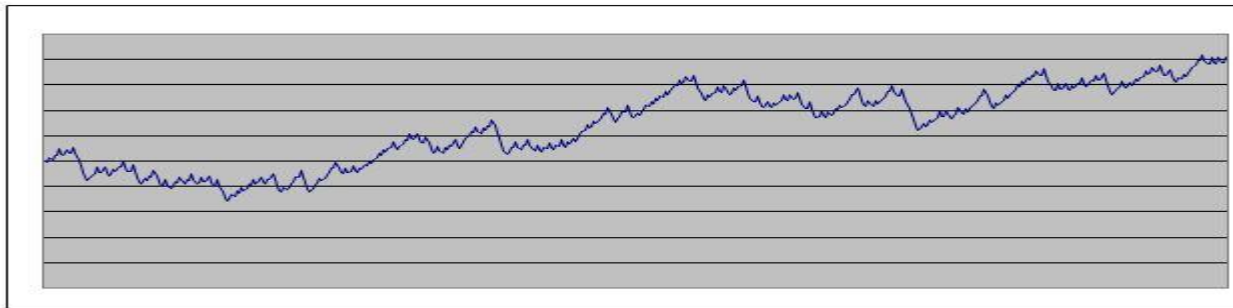
(쉬운) 정의: 규칙을 따르지만 겉보기에 무작위적인 운동
(random motion governed by a deterministic law)

- 규칙: 결정론적 법칙 (예: 뉴턴의 운동법칙)
- 무작위적: 규칙이 없음 → 자기모순 ?

Logistic map: $n(t+1) = 4 * n(t) * (1 - n(t))$, $n(0) = 0.1$

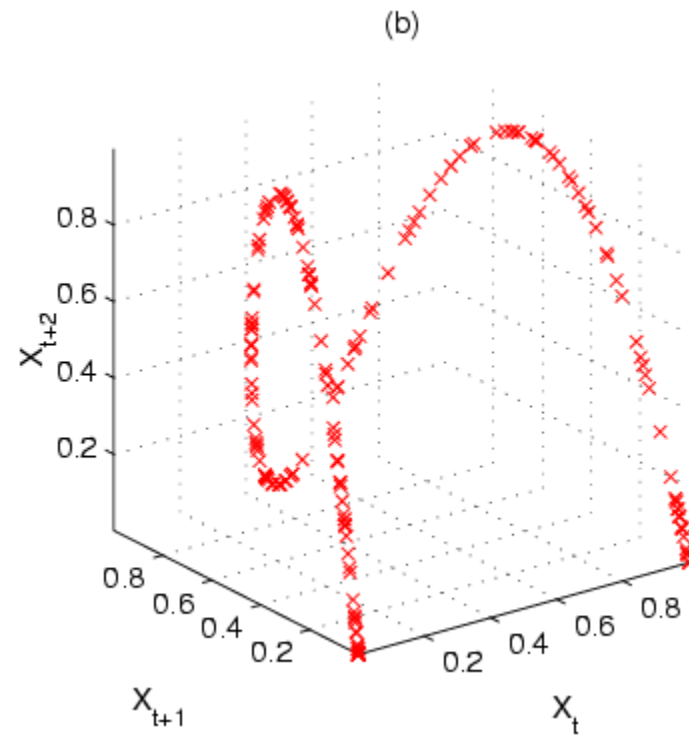
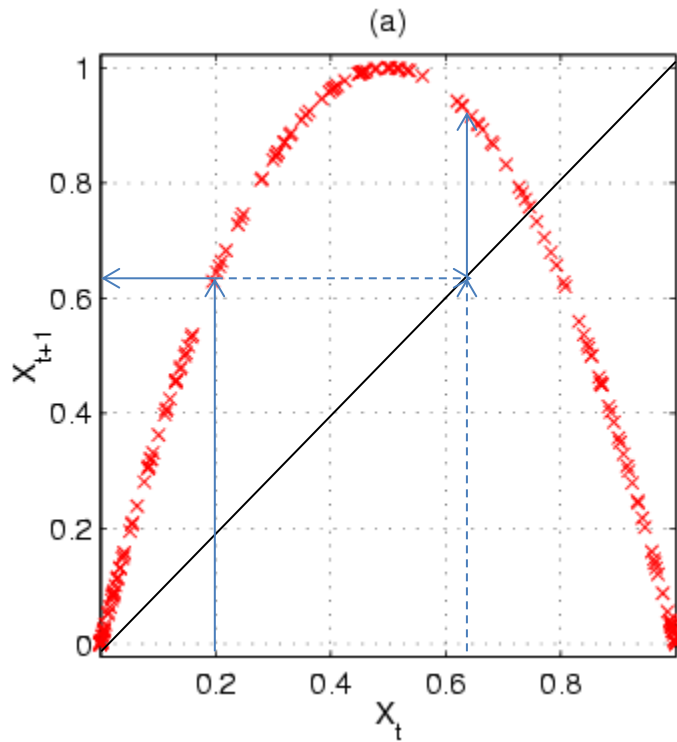


Subtract 0.5 from each sample and accumulate:

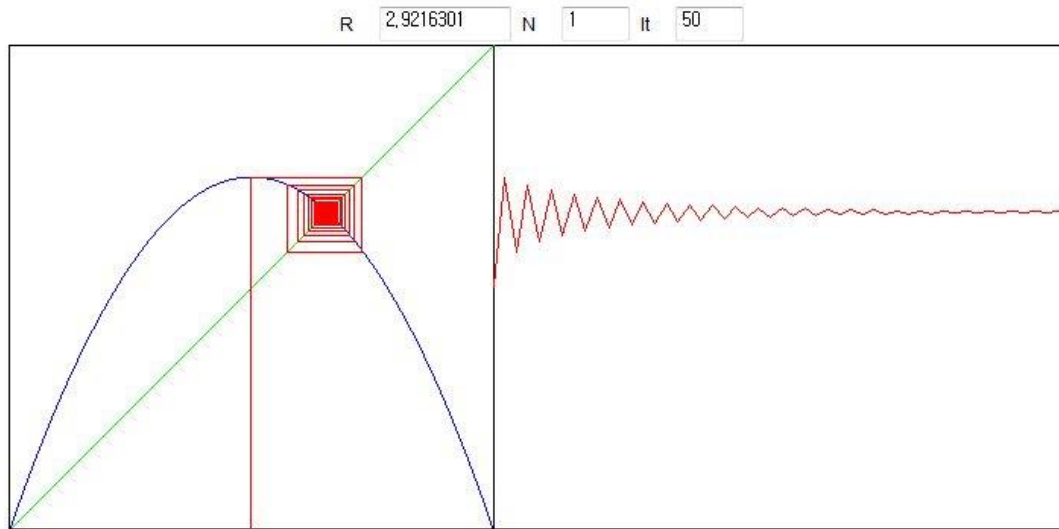


Logistic map(embedding/return map)

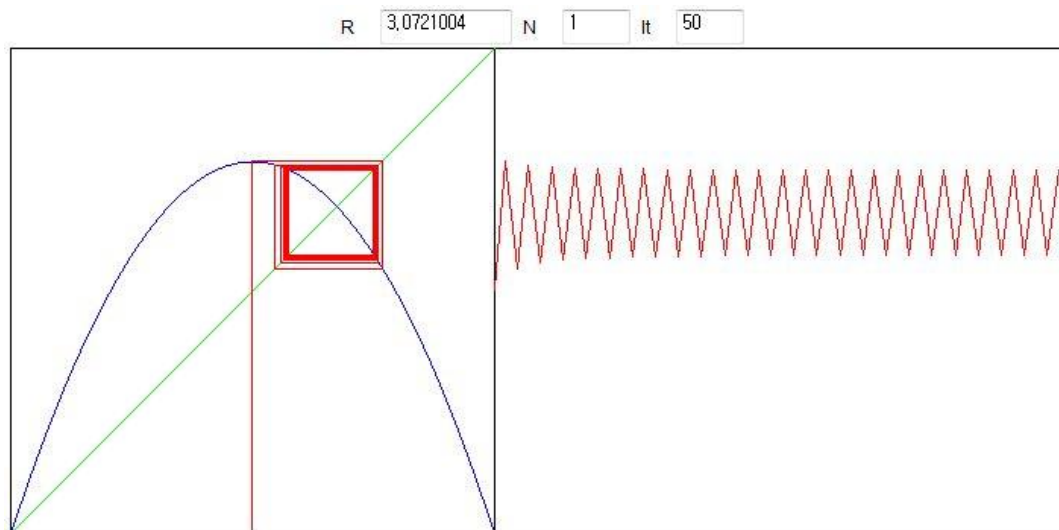
- 무작위적인 외관에 감춰진 질서



Logistic map (iteration)



$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$



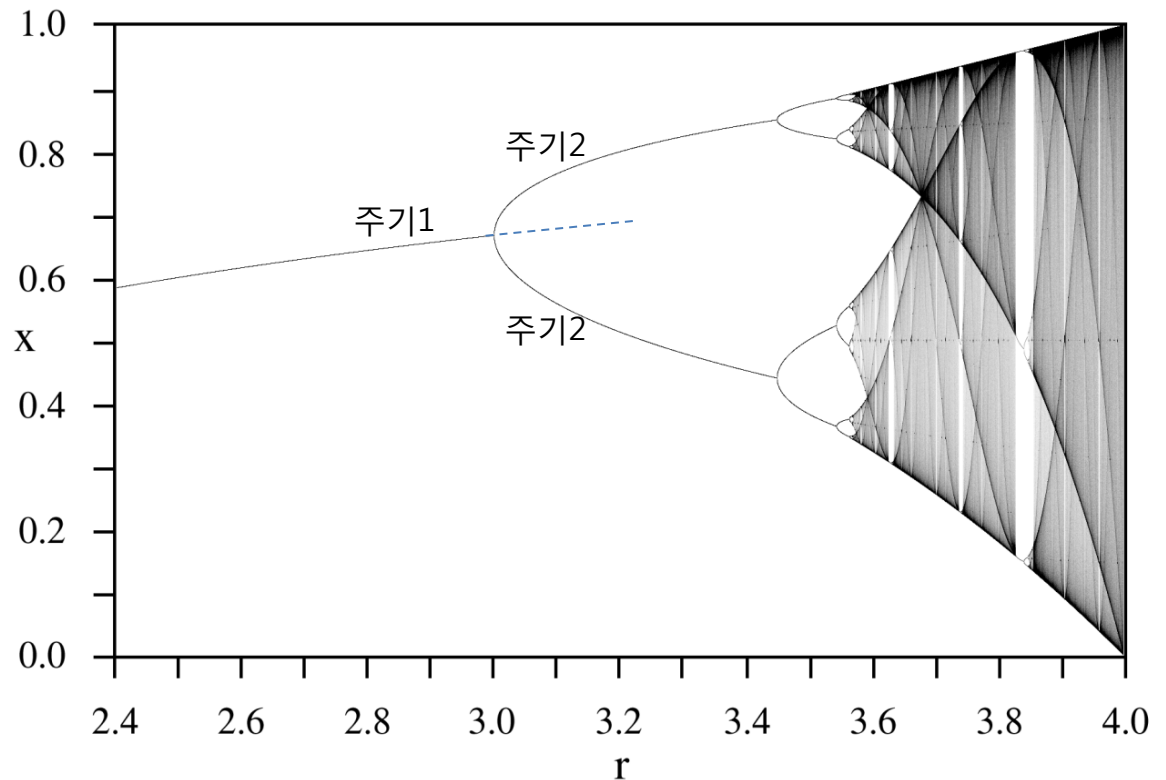
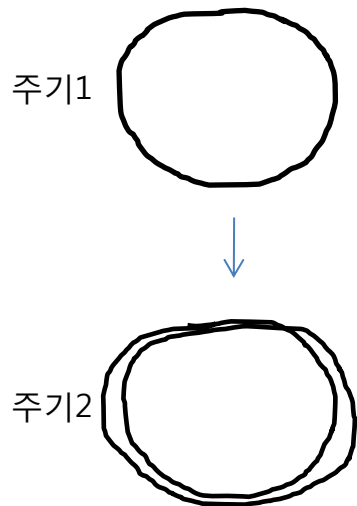
[Simulation Link:](http://ibiblio.org/e-notes/MSet/Logistic.htm)
<http://ibiblio.org/e-notes/MSet/Logistic.htm>

갈래치기 분석

➤ period-doubling bifurcation

- logistic map

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$



✓ period-doubling cascade: fractal, critical behavior, universality (Feigenbaum)

다중진자의 혼돈운동

1차원 진자: 비선형진동(주기가 진폭에 따라 변함), 규칙적 운동

➤ 단진자: 선형진동 ($T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$)

다중진자: 2개 이상의 회전축, 혼돈운동이 가능



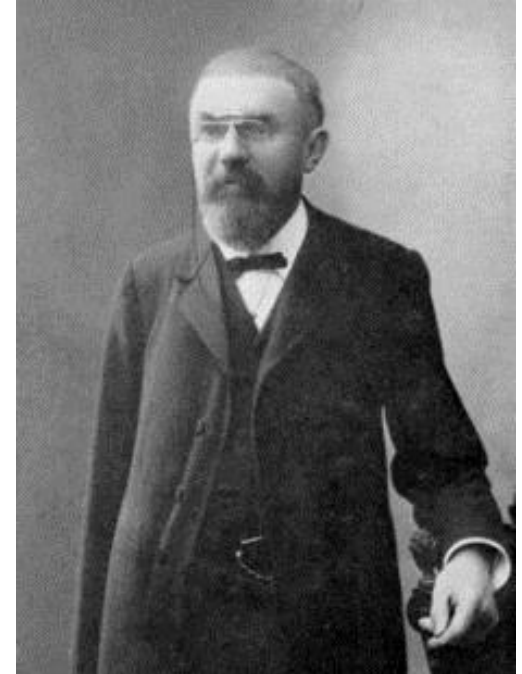
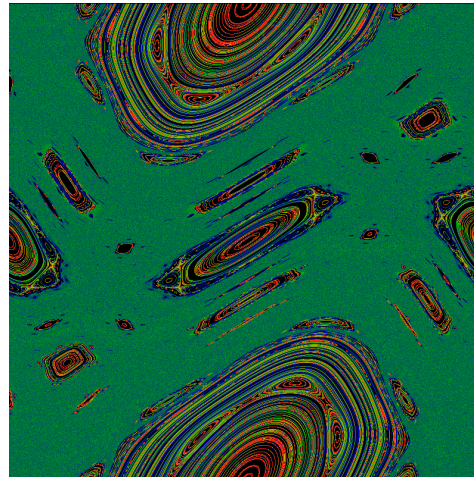
혼돈이론의 역사

3체 문제: Oscar II, King of Sweden (1887)

"Given a system of arbitrarily many mass points that attract each **according to Newton's law**, under the assumption that no two points ever collide, try to find a representation of the coordinates of each point as a series in a variable that is some known function of time and for all of whose values the series **converges uniformly**."

$$\begin{aligned}p_{n+1} &= p_n + K \sin \theta_n \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + p_{n+1}\end{aligned}$$

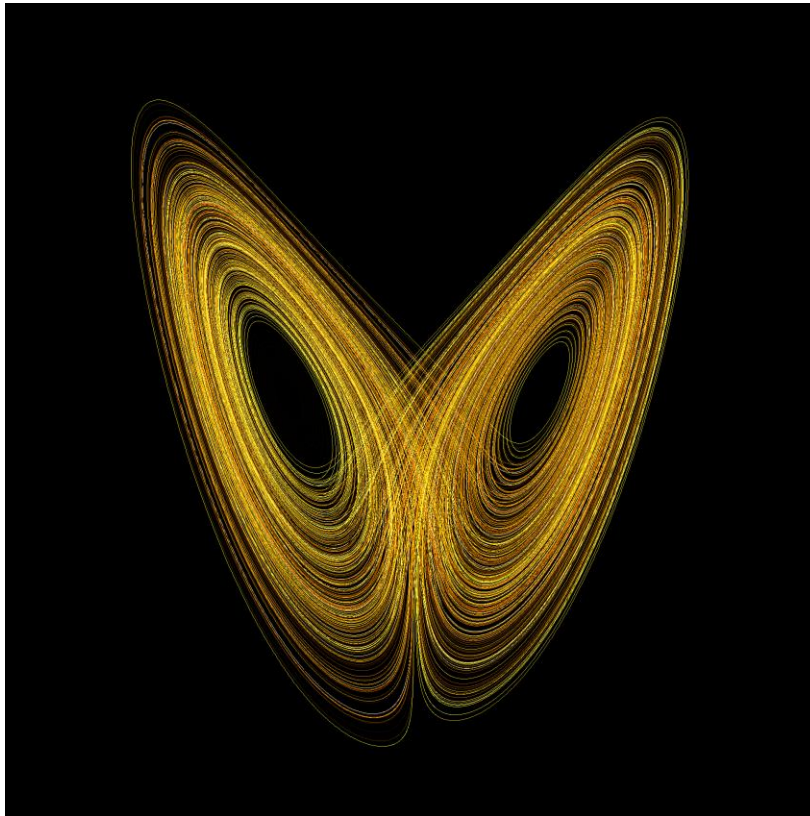
Standard map at $K=1.2$
Breakup of the last
KAM torus (integral)



Jules Henri Poincaré
(1854-1912)
The last *Universalist*

혼돈이론의 역사

"Deterministic nonperiodic flow". *J. Atmos. Sci.* **20** (2): 130–141 (1963)



Lorenz attractor



Edward Norton Lorenz
(1917-2008)
meteorologist, MIT

컴퓨터, 계산과학의 위력!!

✓ 카오스계:

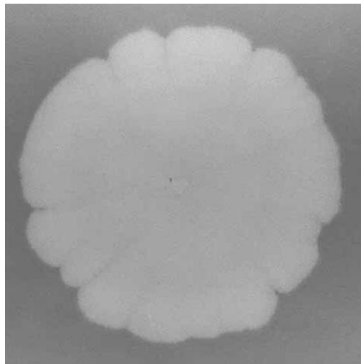
- 단순한 계가 보이는 복잡한 운동
- 극도로 복잡한 정보를 내포한 운동(≠무질서)
- 결정론적인 운동: 초기조건을 완벽하게 알면 미래 예측이 가능
- 질서에서 카오스로 가는 경로에 관심

✓ 복잡계:

- 수많은 요소들로 구성된 계
- 비결정론적, 비예측적(Ilya Prigogine)
- 결정론적 질서와 무작위성(randomness)의 경계 ('edge of chaos', Doyne Farmer)
- 경계로부터 진화하는 복잡계의 창발(emergence) 현상: 단순하면서도 보편적인 양상의 형성, 동기화

복잡계의 문양 형성 - pattern formation in complex systems at NEQ

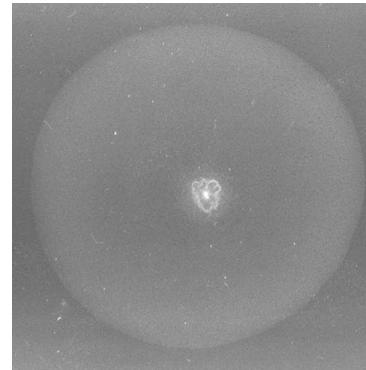
Growth of bacterial colonies



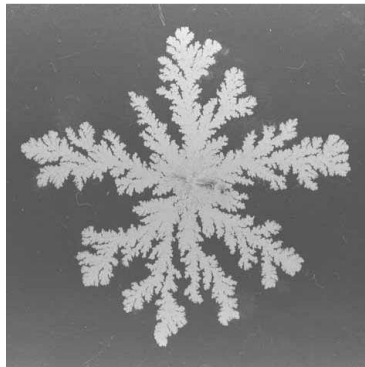
Eden-like pattern (*Bacillus subtilis*)



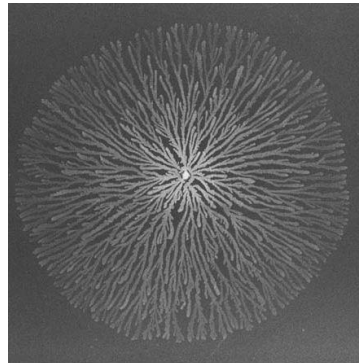
concentric ring pattern (*Bacillus subtilis*)



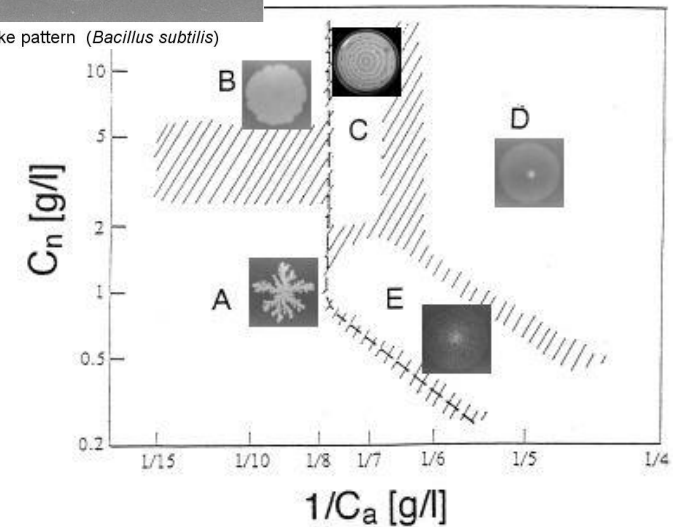
Fisher-like pattern (*Bacillus subtilis*)



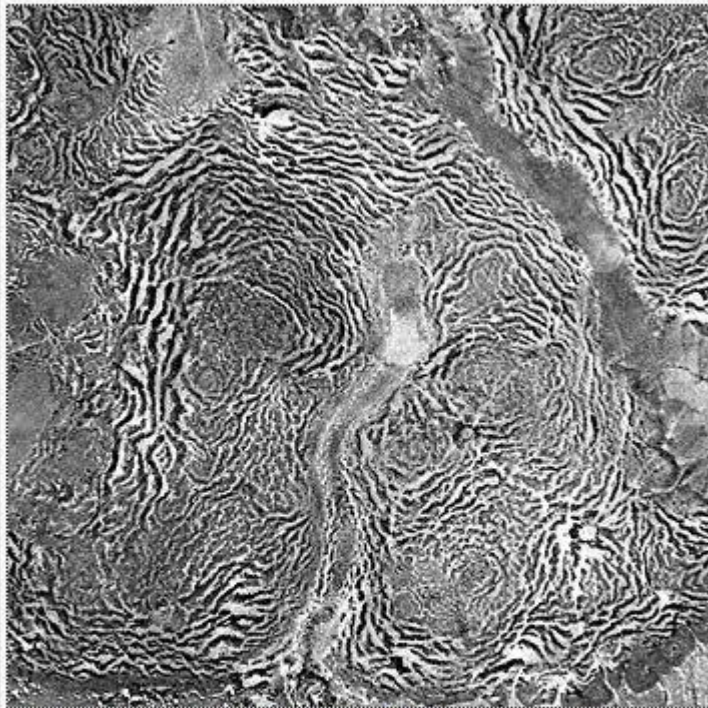
DLA-like pattern (*Bacillus subtilis*)



DBM-like pattern (*Bacillus subtilis*)



복잡계 문양 – 식물군락(tiger bush)



Aerial view of a tiger bush plateau in Niger. Vegetation appears in dark while lighter pixels represent bare soil. The distance between successive vegetated bands varies between 60 and 120 meters. Corona KH-4A satellite reconnaissance system acquired by 1965-12-31.

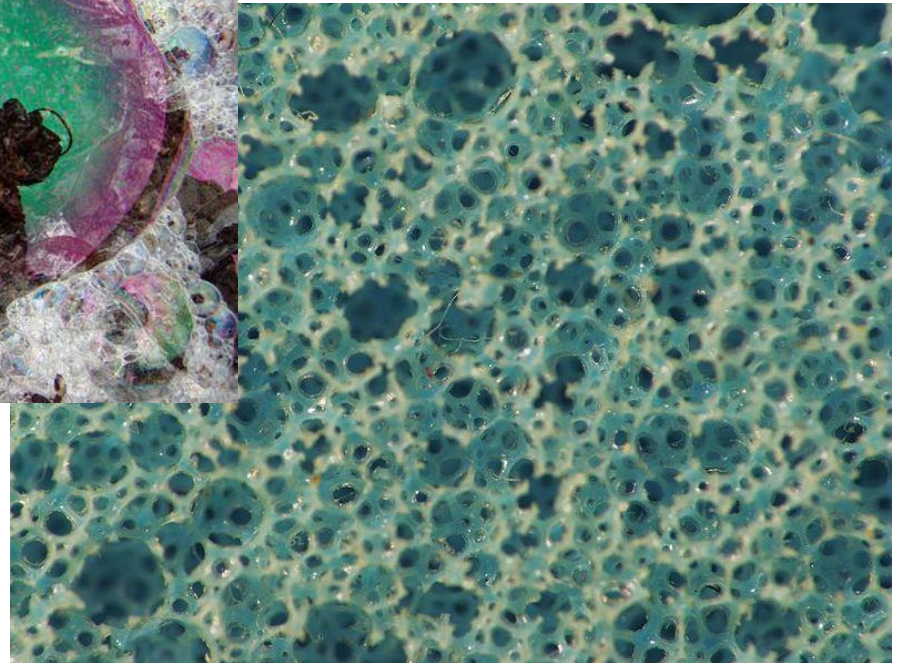
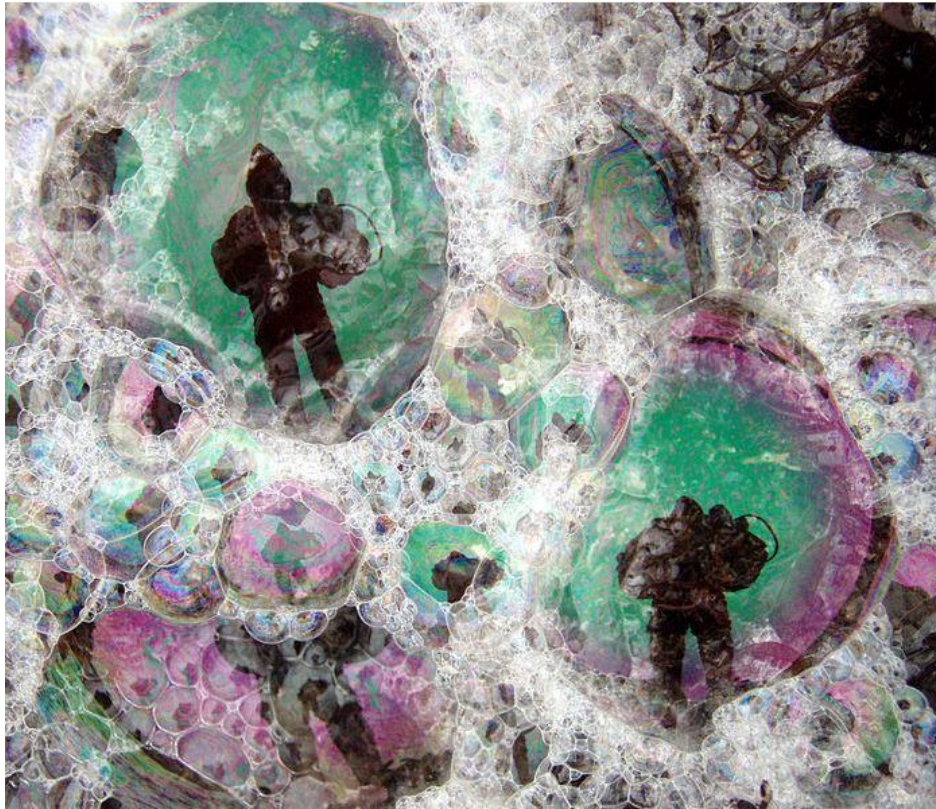


Aerial oblique view of a gapped bush plateau in W National Park, Niger. The mean distance between two consecutive gaps is 50 meters

복잡계 문양 – 망간결정화(manganese dendrite)



복잡계 문양 - 거품



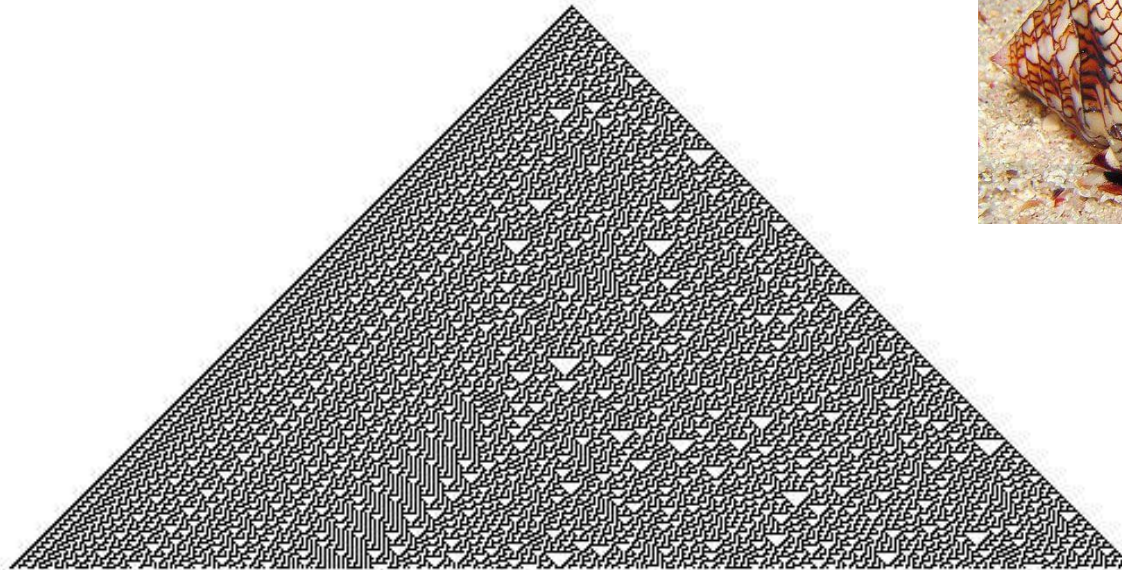
복잡계 문양 - 구름



복잡계 문양 - 눈 결정



복잡계 문양 – Cellular Automata

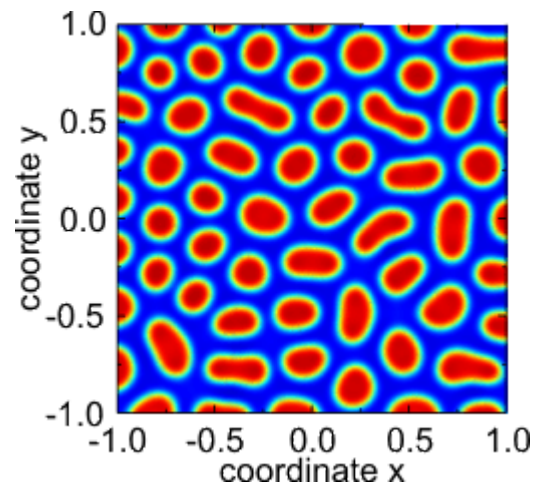
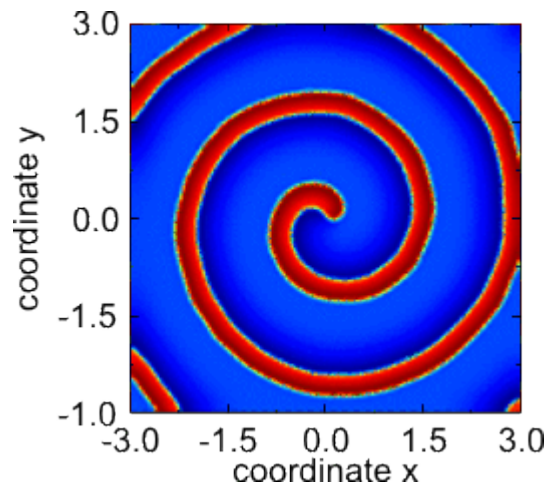
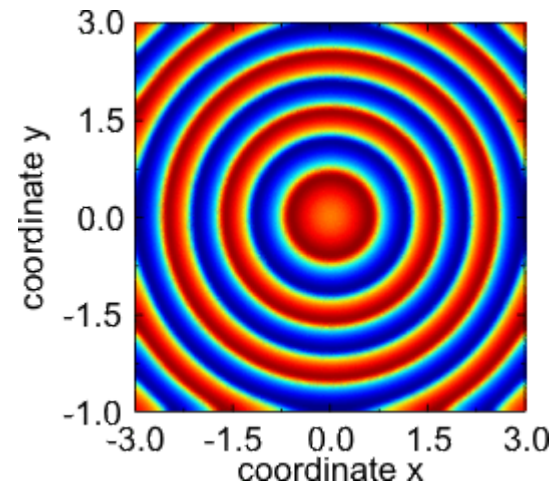
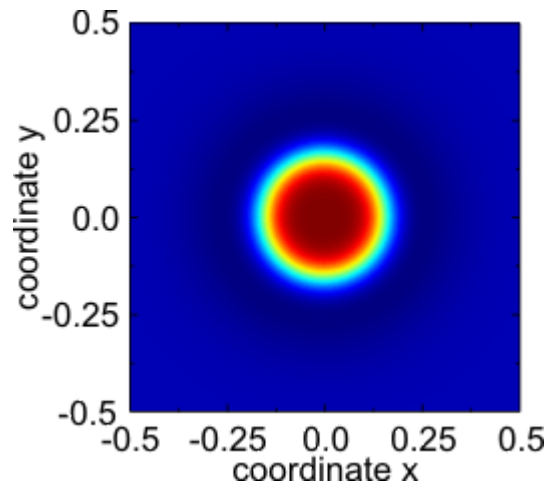


Rule 30 cellular automaton

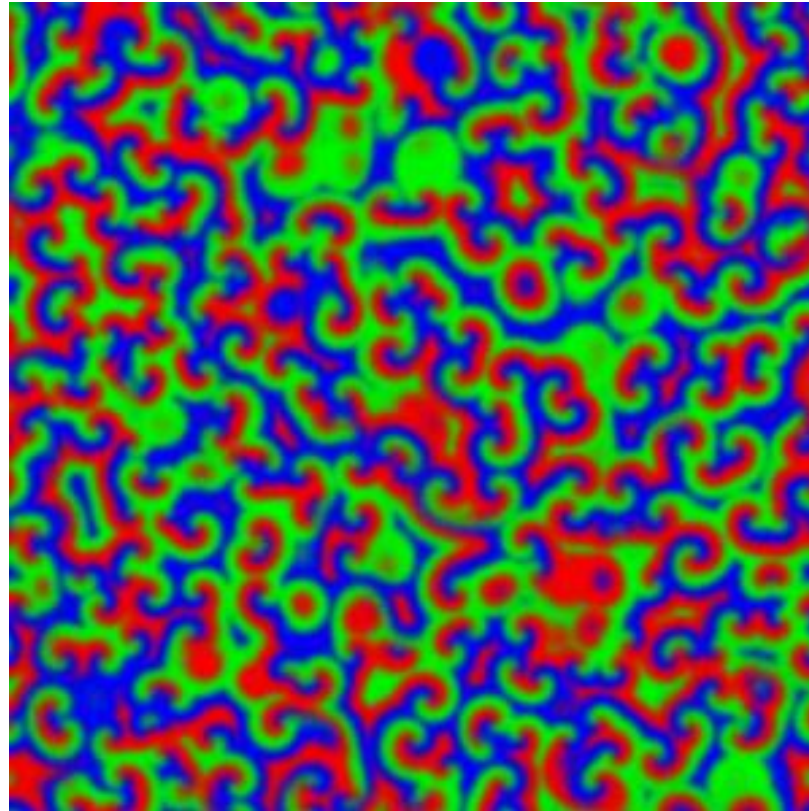


current pattern	111	110	101	100	011	010	001	000
new state for center cell	0	0	0	1	1	1	1	0

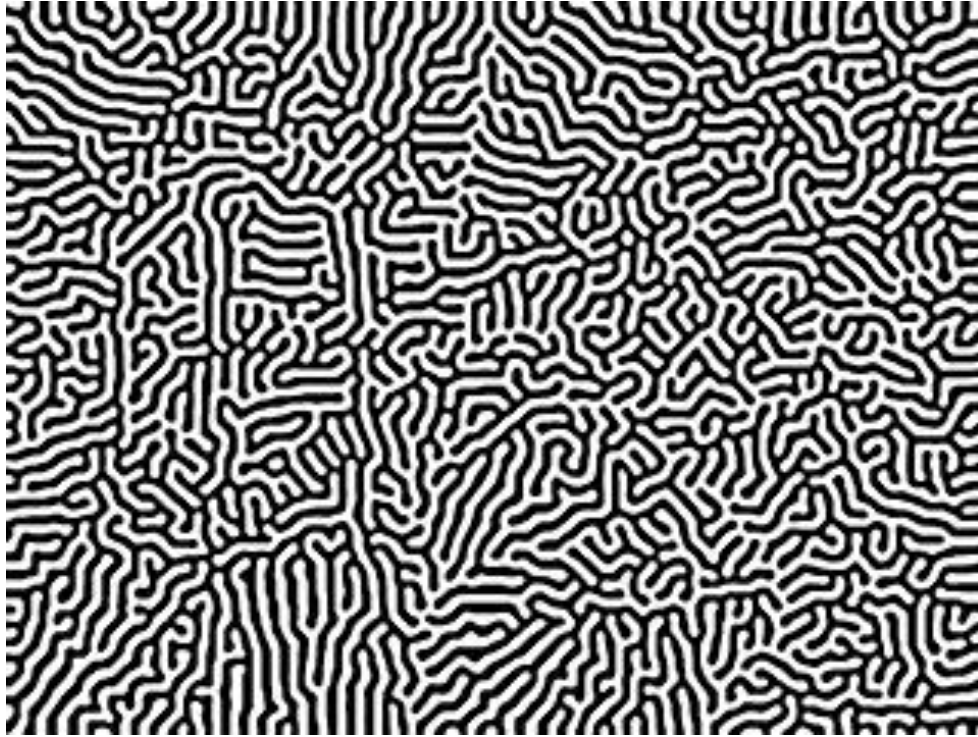
복잡계 문양 – reaction-diffusion eqn. (simulation)



복잡계 문양 – BZ reaction (simulation)



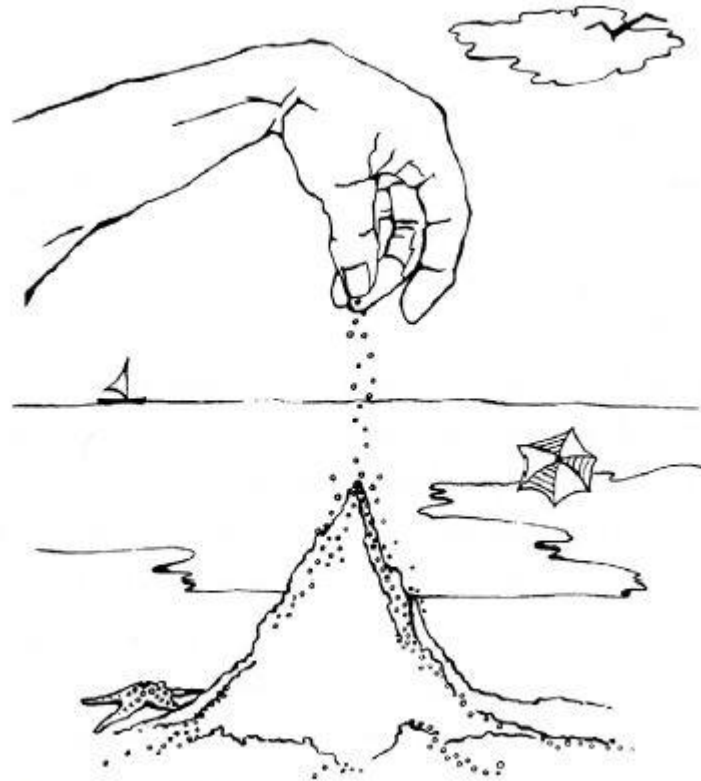
복잡계 문양 – Computer Graphics (sharpening & blurring)



동기화(Synchronization)

- 동기화, 동시성, 동조(entrainment)
- 보편적으로 발현
 - 과종시계의 동기화(Christiaan Huygens), laser, 초전도성(coherency)
 - 밀레니엄 다리, 테크노마트 건물의 진동(!)
 - 생활의 일주기성, 생리주기의 동기화, 닦아가는 부부(?... !)
 - 여론, 유행, 유사업종 상가 밀집지역 형성
 - [반딧불이의 집단 발화](#), [새](#), [물고기](#)들의 군무
 - [Coupled oscillators](#), [Metronomes](#)
- 원래의 계는 매우 많은 구성요소로 인해 큰 자유도를 갖지만, [요소간 상호작용](#)에 의해 자유도가 극도로 제한되어 집단적으로 거동하는 현상.

간단한 물리법칙 – 복잡한 자연현상



임계 경사도에서 모래사태
→“어떤 크기로? 언제?”

그림 1 모랫더미(일레인 비젠펠트 그림)

역함수분포와 임계성

규모에 따른 지진의 분포
→ Gutenberg-Richter 법칙
(1954)

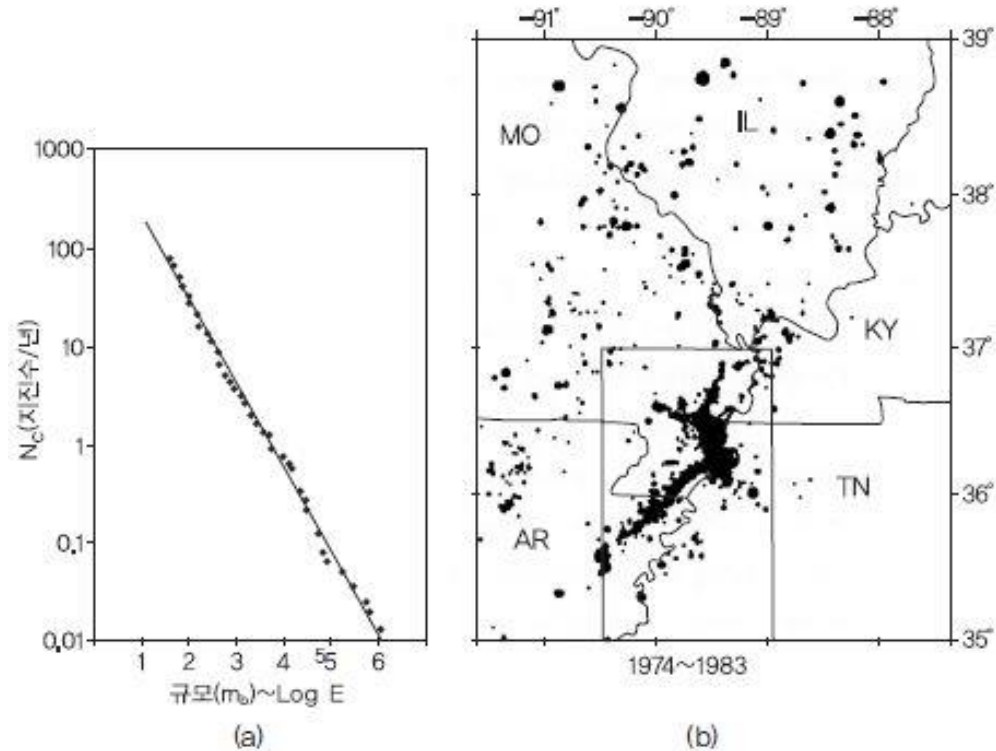


그림 2 (a) 1974년부터 1983년 사이에 미국 남동부 뉴마드리드에서 발생한 지진 규모 분포도. 멤피스대학의 아치 존스톤과 수전 나바가 수집함. 그림에서 점은 특정 규모 M 보다 큰 규모의 지진의 수를 나타낸다. 직선은 지진의 규모 분포가 역함수를 따라 분포함을 의미한다. 이 법칙이 구텐베르크-리히터법칙으로 알려져 있다. (b) a 그래프에 사용한 지진의 위치. 점의 크기는 지진의 규모를 나타낸다.(MO: 미주리주, IL: 일리노이주, KY: 켄터키주, AR: 알칸소주, TN: 테네시주)

멱함수분포와 임계성

면화가격의 월간 변화의 분포 (Mandelbrot, 1963)

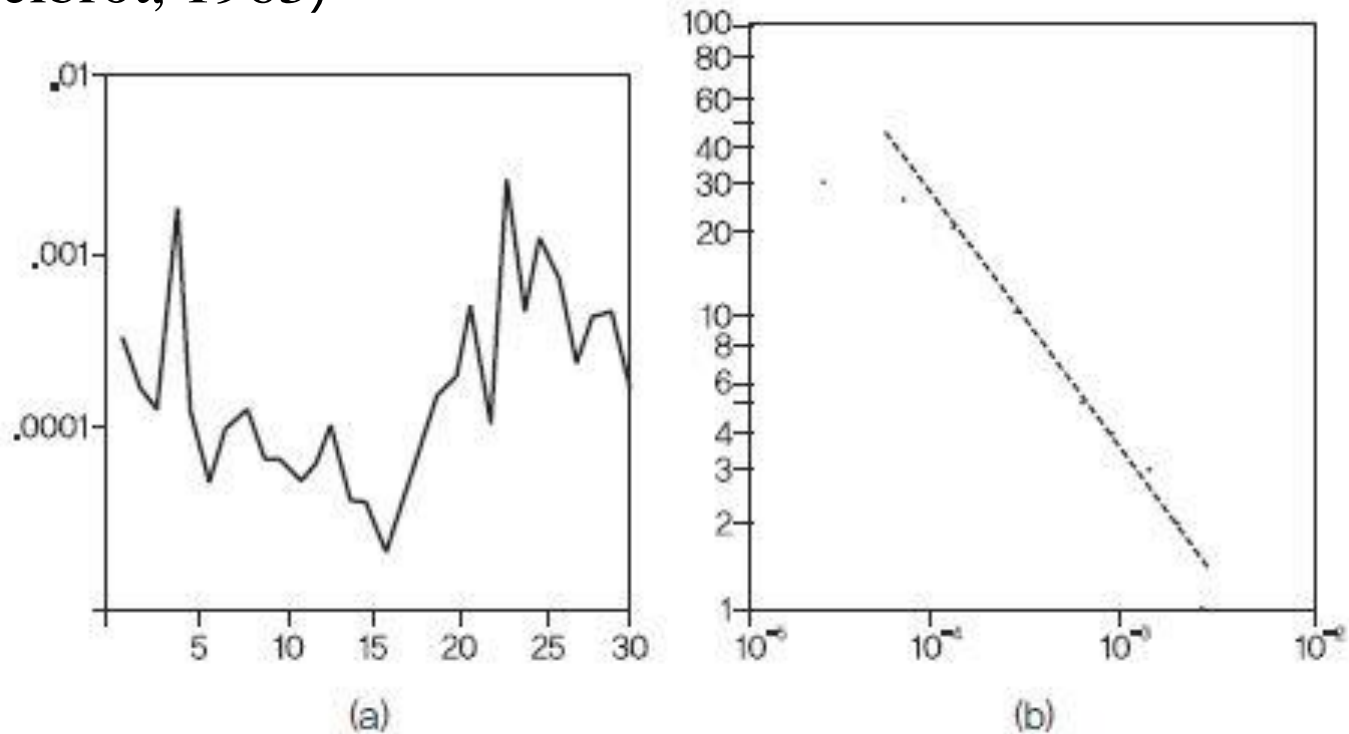


그림 3 (a) 면화 가격의 30개월간의 월간 변화(만델브로, 1963). (b) 가격의 상대적 변화가 x 축에 주어진 값을 초과한 달의 수를 y 축에 보여 준다. 가격의 작은 변화부터 큰 변화까지 그 분포가 부드럽게 연결된다. 직선은 분포가 멱함수로 주어짐을 나타낸다. 다른 원자재도 비슷한 패턴을 따른다.

멸종수분포와 임계성

멸종 종수의 분포(Raup, 1986)

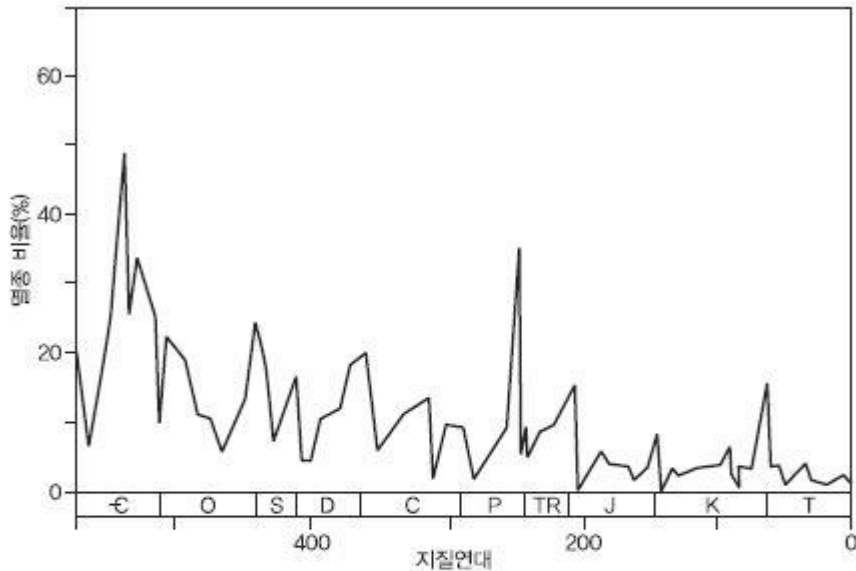


그림 4 지난 6억 년간의 생물학적 멸종 자료 그래프, 존 셉코스키 주니어가 도서관에서 10년 동안 화석 기록에서 나온 데이터를 수집해서 얻은 자료임. 전체 기간을 대략 400만 년의 간격으로 분리한 후 각 기간에 멸종한 과(科)의 퍼센트 추정치를 보여 준다(셉코스키, 1993). (C: 캄브리아기, O: 오르도비스기, S: 실루리아기, D: 데본기, C: 석탄기, TR: 트라이아스기, J: 쥐라기, K: 백악기, T: 신생대제3기)

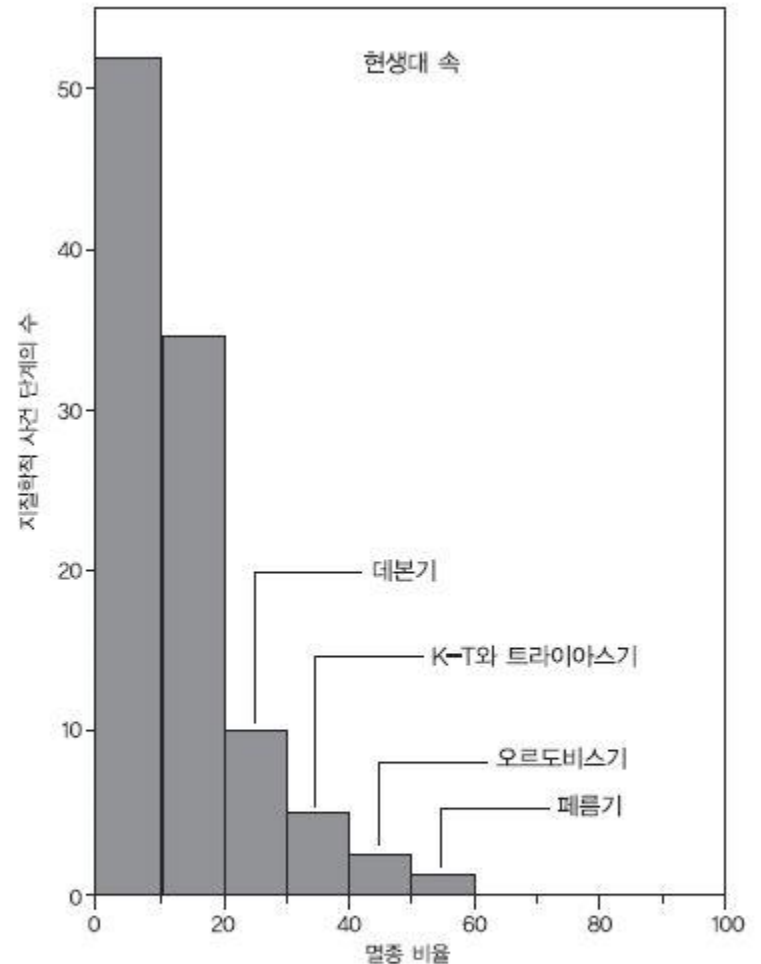


그림 5 그림 4의 자료를 이용하여 라우프가 그린 멸종률별 막대그래프. 멸종률을 10퍼센트 범위로 분리하여 각 퍼센트 범위의 멸종률이 400만 년을 단위로 몇 번 발생하였는지 보여준다. 대규모 멸종 사건으로 잘 알려진 것은 그래프의 오른쪽 끝부분, 50에서 60퍼센트 구간에 있다.

역함수분포와 임계성

해안선의 길이 - 프랙탈

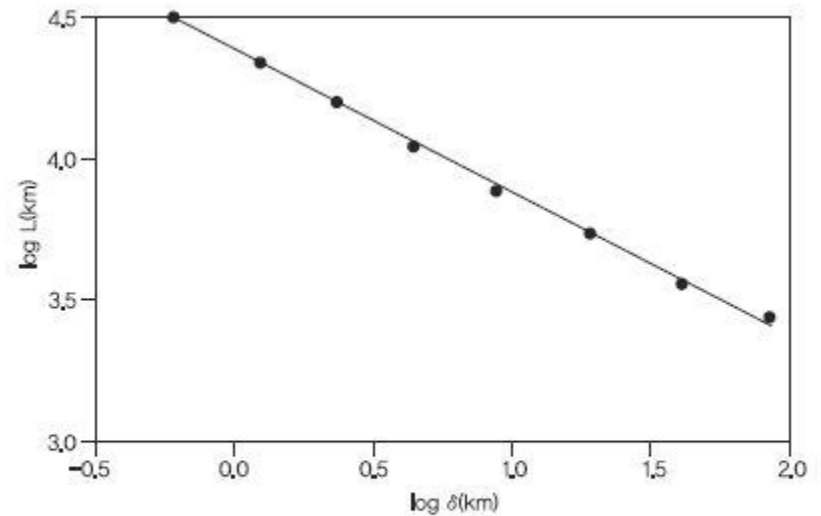
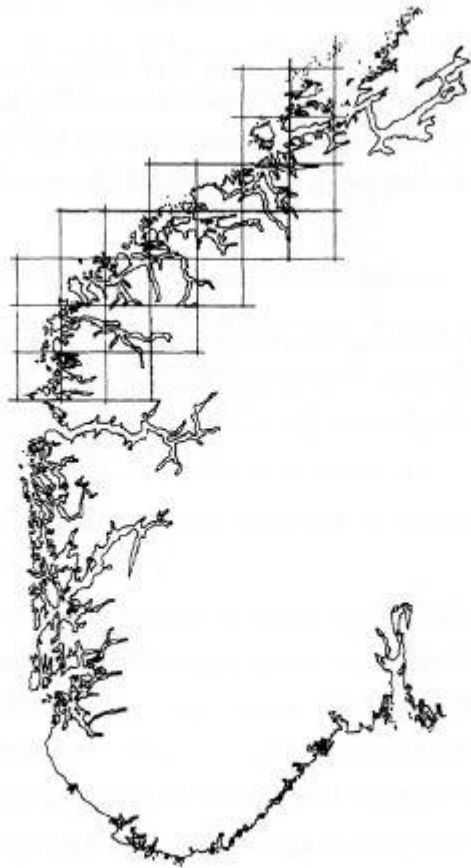


그림 6 (b) 자의 눈금 δ 를 변화하면서 측정된 (a)에서 보여 준 것과 같은 해안선의 길이 L . 다양한 길이 δ 를 가진 상자로 해변을 덮는 데 필요한 상자 수를 측정한 후 상자 수 곱하기 δ 로 해변의 길이를 정의함. 그림의 직선은 해변이 프랙털 구조라는 것을 나타낸다. 직선의 경사도는 노르웨이 해변의 '프랙털 차원(fractal dimension)'으로 $D=1.520$ 이다.

그림 6(a) 노르웨이 해안 피오르, 피오르 내의 피오르가 계속되는 프랙털 형태의 계층 구조 기하학에 주목하자. 만델브로는 지형이 종종 프랙털이라고 지적했다(페데르, 1998).

멱함수분포와 임계성

도시의 인구별 순위, 단어 사용빈도 순위

→ Zipf의 법칙(1949)

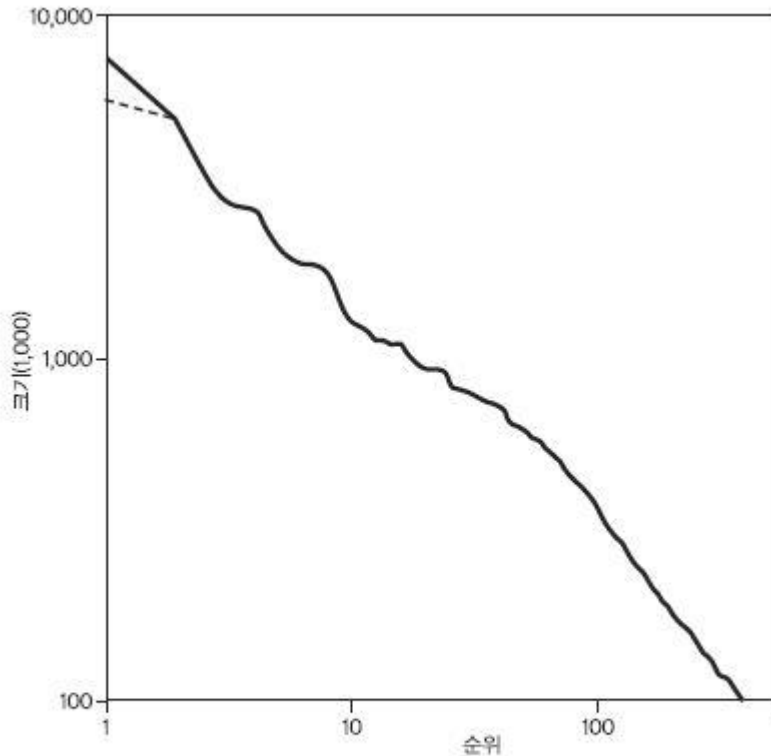


그림 8 (a) 1920년 무렵 인구별 도시 순위(지프, 1949). 주어진 y 값에 대한 x 값을 읽으면 도시 인구가 특정 크기를 넘는 도시의 수가 된다. 반대로 주어진 x 값에 대한 y 값을 읽으면 주어진 순위의 도시 인구를 얻는다.

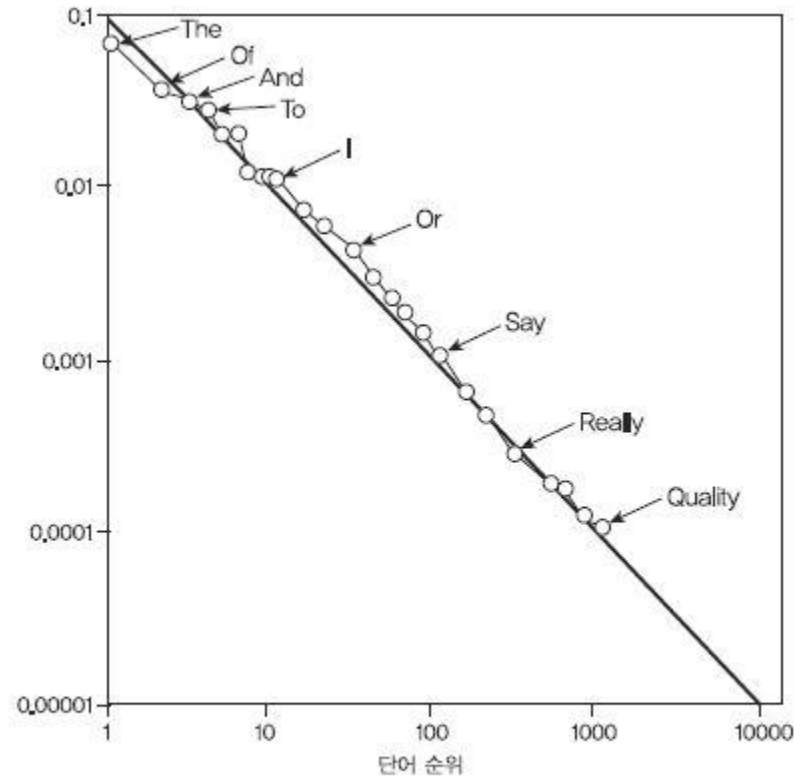


그림 8 영어 단어 사용에 나타난 지프의 법칙. (b) 영어에서 많이 사용되는 순서에 의한 단어 순위. 주어진 y 값에 대한 x 값의 좌표를 읽으면, 주어진 빈도 이상으로 나오는 단어가 몇 개인지를 보여 준다.

멱함수분포와 임계성

멱함수 분포: $N(s) = s^{-\tau}$

s : 지진의 에너지

$N(s)$: 에너지 s 인 지진의 수

log-log 그래프는 기울기 $-\tau$ 인 직선 : $\log N(s) = -\tau \log s$

임계성 : 특징 크기가 없다.(평균값은 무의미)

→ 복잡계에서는 저절로 이루어짐(SOC)

평형상태의 임계점은 특별한 경우(상전이점)

→ 온도를 조절함으로써 도달

모랫더미 모형(BTW 모형, 1987)

1	2	0	2	3
2	3	2	3	0
1	2	3	3	2
3	1	3	2	1
0	2	2	1	2

1	2	0	2	3
2	3	2	3	0
1	2	4	3	2
3	1	3	2	1
0	2	2	1	2

1	2	0	2	3
2	3	3	3	0
1	3	0	4	2
3	1	4	2	1
0	2	2	1	2

1	2	0	2	3
2	3	3	4	0
1	3	2	0	3
3	2	0	4	1
0	2	3	1	2

✓ 모래알 떨어뜨리기:

$$Z(x, y) \rightarrow Z(x, y) + 1$$

1	2	0	3	3
2	3	4	0	1
1	3	2	2	3
3	2	1	0	2
0	2	3	2	2

1	2	1	3	3
2	4	0	1	1
1	3	3	2	3
3	2	1	0	2
0	2	3	2	2

1	3	1	3	3
3	0	1	1	1
1	4	3	2	3
3	2	1	0	2
0	2	3	2	2

1	3	1	3	3
3	1	1	1	1
2	0	4	2	3
3	3	1	0	2
0	2	3	2	2

✓ 한계높이에서 옮김 규칙:

$$Z(x, y) \rightarrow Z(x, y) - 4$$

$$Z(x \pm 1, y \pm 1) \rightarrow Z(x \pm 1, y \pm 1) + 1$$

1	3	1	3	3
3	1	2	1	1
2	1	0	3	3
3	3	2	0	2
0	2	3	2	2

1	3	1	3	3
3	■	■	■	1
2	■	■	■	3
3	3	■	■	2
0	2	3	2	2

그림 12 작은 모랫더미에서 모래알 옮김 사태에 대한 예시. 격자 중앙의 높이가 3인 사각형에 모래알을 떨어뜨린다. 그러면 모래알 형태는 7단계에 걸쳐서 변하고 아홉 번의 모래알 옮김이 이루어진다. 따라서 이 사태의 크기는 $s=90$ 이고, 기간은 $t=70$ 이다. 검은 사각형은 모래알 옮김이 이루어진 여덟 개의 사각형을 나타낸다. 한 사각형에서는 두 번의 모래알 옮김 과정이 벌어졌다.

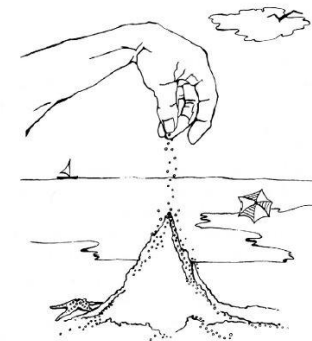
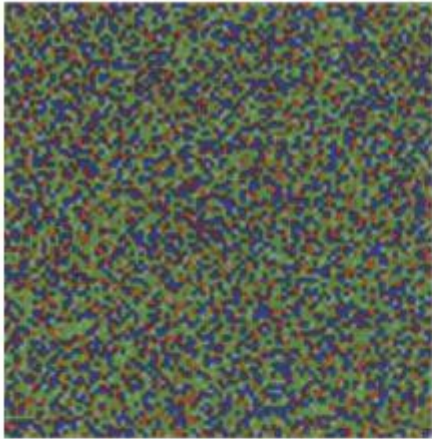
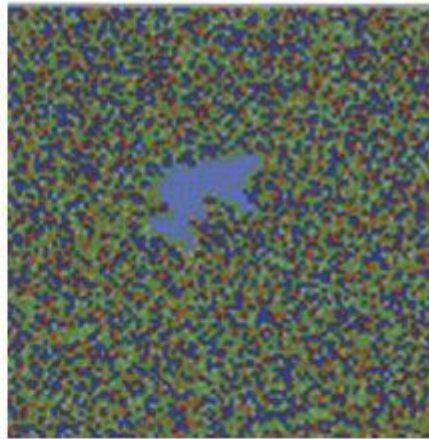


그림 1 모랫더미일레인 비잔델트 그림

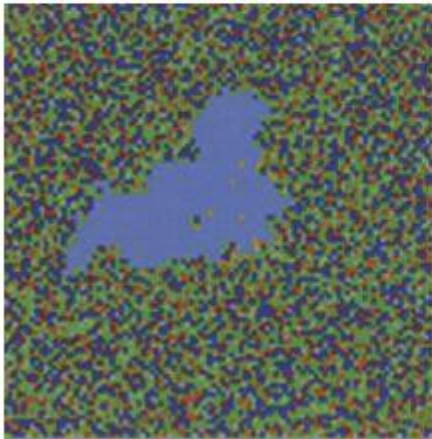
모랫더미 모형



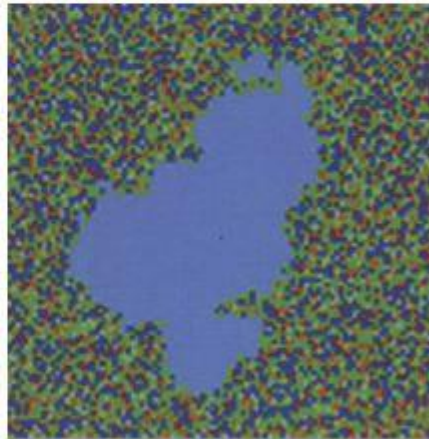
a



b



c



d

삽화 1 모랫더미 모형에서 퍼져 나가는 사태의 스냅 사진. 회색, 초록, 파랑과 빨강은 각각 높이 0, 1, 2, 그리고 3에 대응한다. 옅은 청색은 적어도 한 번은 무너진 기둥을 나타낸다. 사태가 성장할 때 옅은 청색 영역은 커진다. (미하엘 크로이츠에게 게재 허락을 받음)

모랫더미 모형

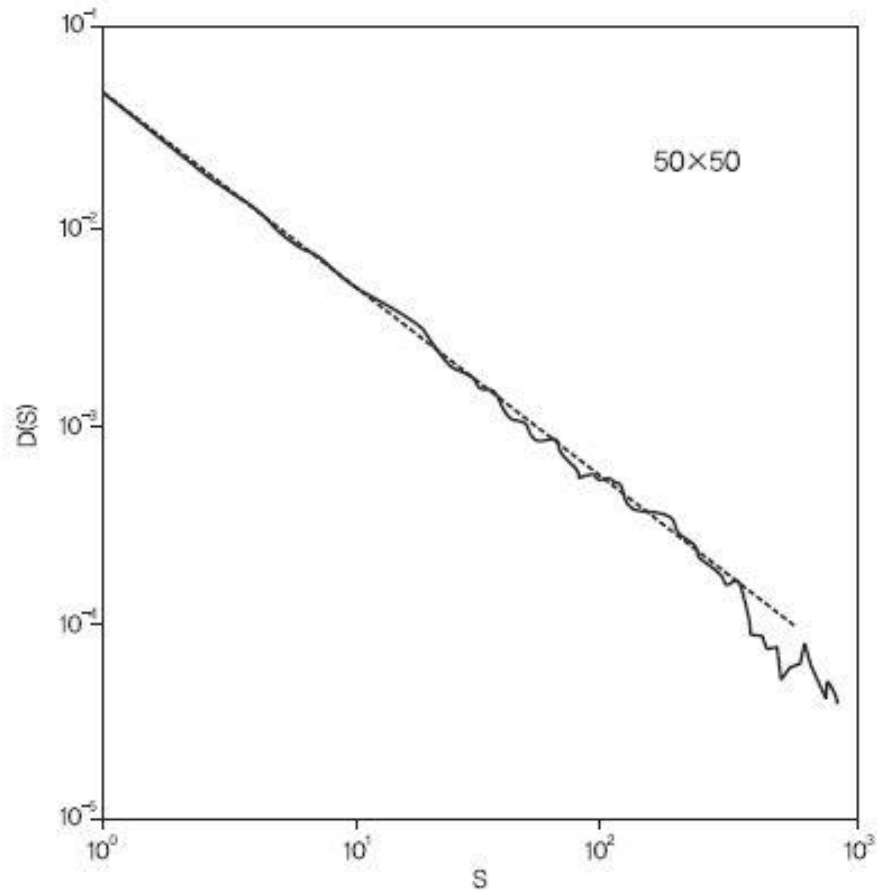


그림 11 모랫더미 모형에서 나타나는 사태 크기별 분포도(연결된 추 모형도 동등한 결과를 얻음). 각 사태 크기가 몇 번 발생했는지 로그-로그 스케일로 보여준다. 멱함수 분포를 보이며 멱함수 지수는 1.1이다. SOC 연구에 대한 우리의 첫 번째 결과 그래프다. 더 큰 시스템에서 더 긴 시간 시뮬레이션하면 분포가 멱함수로 주어지는 영역을 확장할 수 있다.

모랫더미 모형

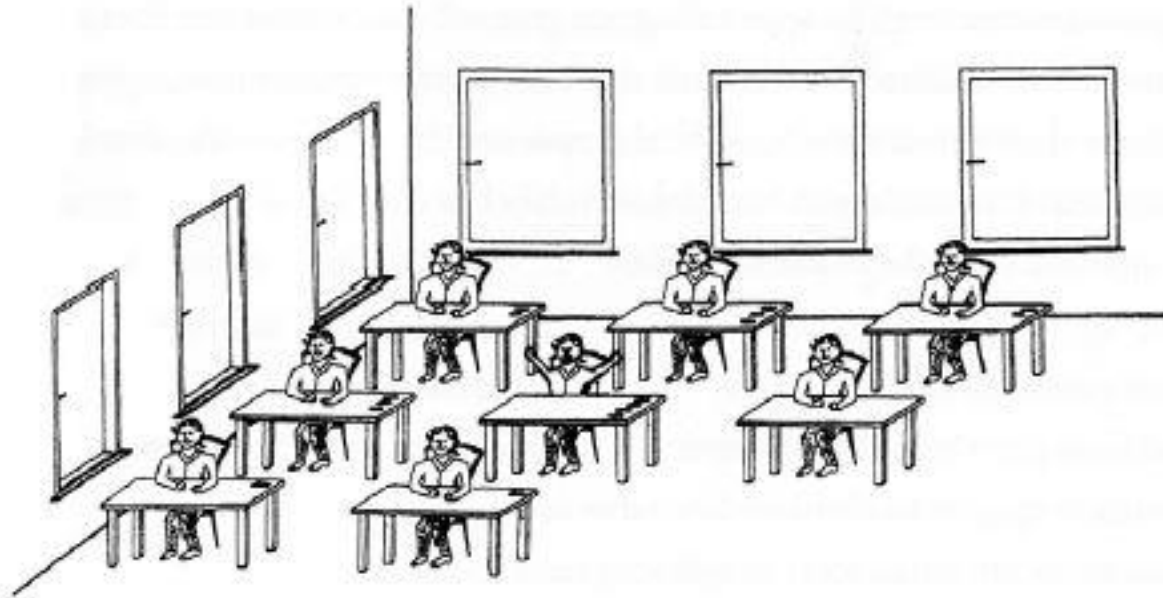
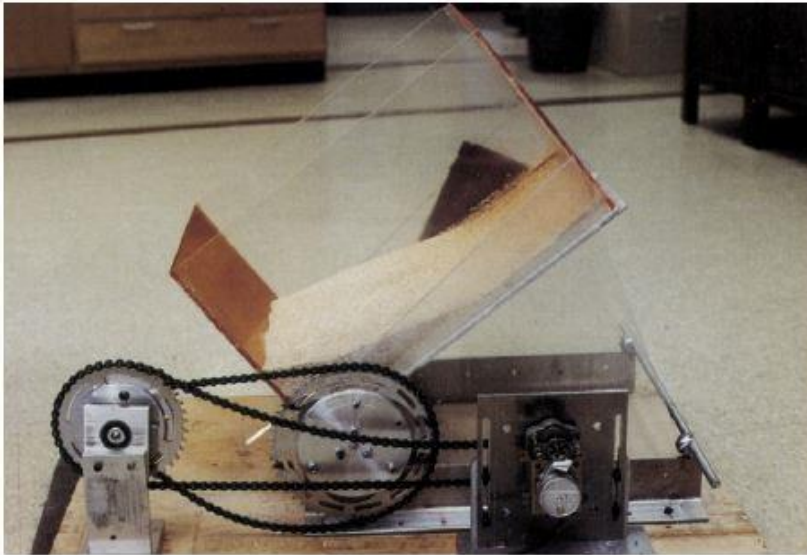
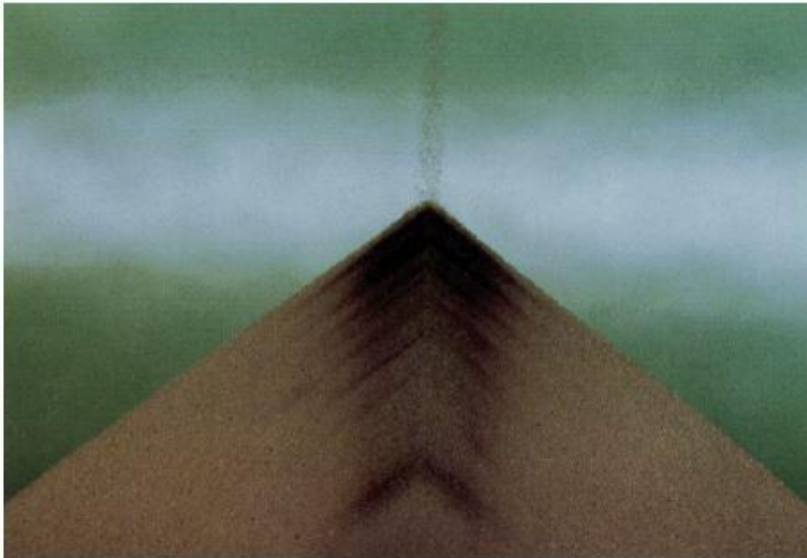


그림 13 모랫더미 모형의 사무실 버전 일정 시간 간격을 두고, 서류 한 장이 임의의 관리 책상에 떨어진다. 모든 관리는 자신의 책상 위에 녀 장 이상의 서류가 쌓이면, 한 장을 이웃한 동료에게 주거나, 또는 창밖으로 던져 버린다(피터 그라스버그 제공).

모랫더미 모형 (실험)

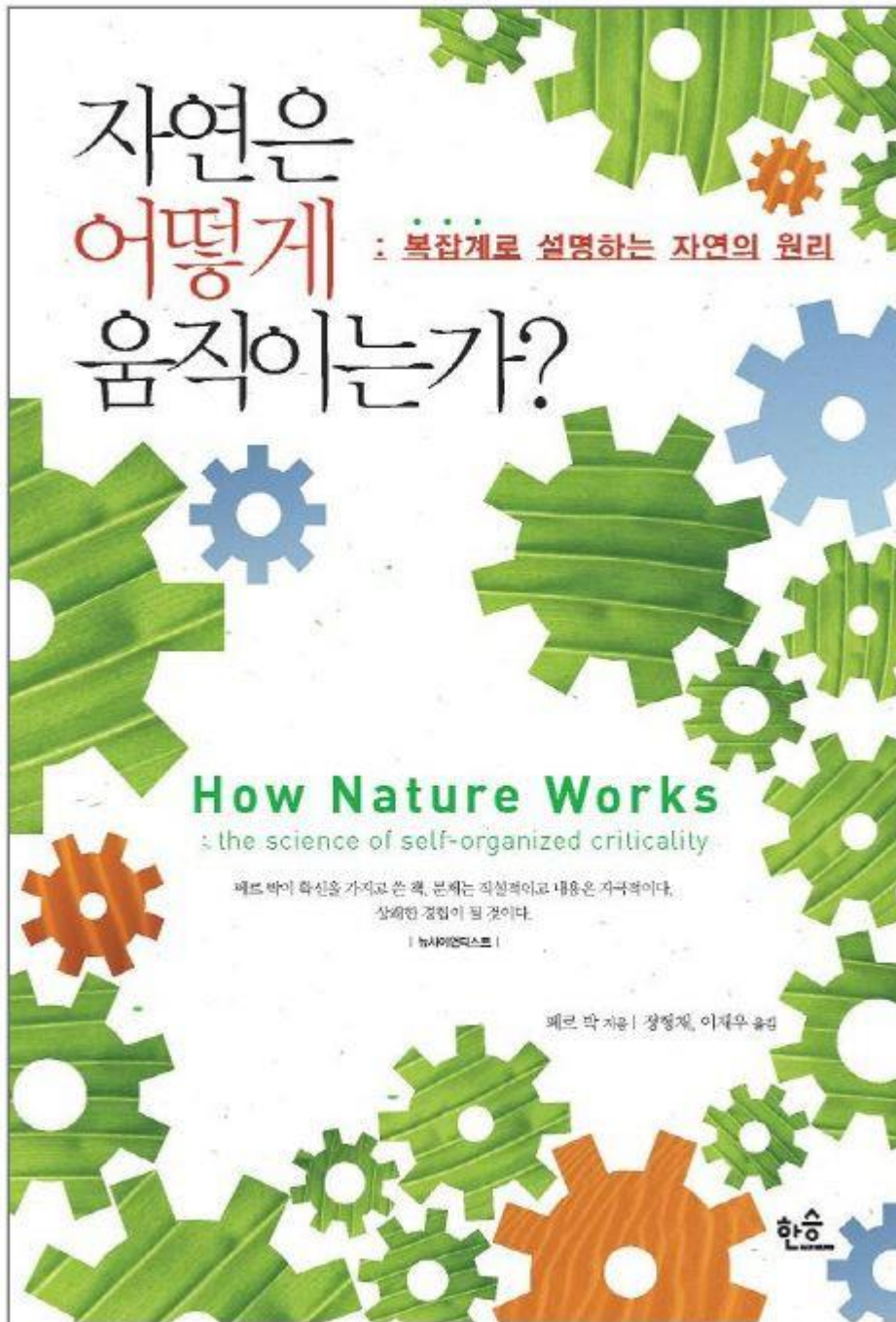


a



b

삽화 3 마이클 브레츠와 프랑코 노리가 이끄는 미시간대학교 연구 그룹이 수행한 모랫더미 실험. (a) 기울어진 모랫더미, (b) 원추 모양의 모랫더미, 사진의 모랫더미는 비디오리코더로 얻은 디지털 이미지를 나타낸 것이다.



자기조직화 임계성 (SOC)

“Self-Organized Criticality. An Explanation of $1/f$ Noise“, *PRL* **59** 381 (1987)



Per Bak (1948 – 2002)
Physicist, BNL

Finale